| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 350391<br>30 agosto 2023 |
|---|---|---|

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

| | |
|---|---|
| 1 | b |
| 2 | b |
| 3 | d |
| 4 | c |
| 5 | d |
| 6 | b |
| 7 | a |
| 8 | b |
| 9 | a |
| 10 | c |
| 11 | c |
| 12 | b |

**1.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{4/3}\sin x}{1+(\cos x)^2}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2}\right) =$

(a) $-\infty$ ► (b) non esiste (c) $\frac{1}{3}$ (d) $+\infty$

*Soluzione*:

$$f(x)=\frac{x^{4/3}\sin x}{1+\cos^2 x}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2}\right)$$

Osserviamo che, per $x\to+\infty$.

$$\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2}=\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3}-x^{2/3}=x^{2/3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3}-x^{2/3}=$$

$$=x^{2/3}\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x^{2/3}=x^{2/3}\left(1+\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)-1\right)=$$

$$=\frac{1}{x^{4/3}}\left(\frac{1}{3}+o(1)\right),$$

quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{4/3}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2}\right)=\frac{1}{3}$.

Scegliamo ora $a_n=n\pi$ e $b_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. Risulta che

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n\pi)}{1+\cos^2(n\pi)}\cdot(n\pi)^{4/3}\left(\sqrt[3]{(n\pi)^2+1}-\sqrt[3]{(n\pi)^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{1+1}\cdot(n\pi)^{4/3}\left(\sqrt[3]{(n\pi)^2+1}-\sqrt[3]{(n\pi)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}f(b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\cdot b_n^{4/3}\left(\sqrt[3]{b_n^2+1}-\sqrt[3]{b_n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+0}\,b_n^{4/3}\left(\sqrt[3]{b_n^2+1}-\sqrt[3]{b_n}\right)=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Dato che $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, otteniamo che

non esiste $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

**2.** Sia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\sin^2 x$. La funzione $f$

(a) è iniettiva

► (b) non è né iniettiva né surgettiva

(c) è surgettiva

(d) è bigettiva

*Soluzione*:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin^2 x.$

$0 \le \sin x \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ quindi $f$ non è surgettiva.

$f$ è periodica, quindi non è iniettiva.

**3.** $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{1} (t+1)\sqrt{t}\, dt =$

(a) $\frac{8}{3}$ (b) 0 (c) $+\infty$ ► (d) $\frac{16}{15}$

*Soluzione*:

$$\int (t+1)\sqrt{t}\, dt = \int t^{3/2} + t^{1/2}\, dt = \frac{2}{5} t^{5/2} + \frac{2}{3} t^{3/2} + c$$

$$\int_{1/x}^{1} (t+1)\sqrt{t}\, dt = \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_{1/x}^{1} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\frac{1}{x^{5/2}} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^{1} (t+1)\sqrt{t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x^{5/2}} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^{3/2}} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$$

In alternativa basta osservare che la funzione

$F(z) = \int_z^1 (t+1)\sqrt{t}\, dt$ è continua, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = F(0) = \int_0^1 (t+1)\sqrt{t}\, dt = \dots = \frac{16}{15}.$$

**4.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx =$

(a) -2 (b) $\dfrac{\pi^2}{8}$ ► (c) $-\dfrac{1}{2}$ (d) 0

*Soluzione*:

$$\int x\cos(2x)\,dx =$$

per parti integrando cos(2x)
e derivando x

$$= x\,\frac{\sin(2x)}{2} - \int 1\cdot\frac{\sin(2x)}{2}\,dx = \frac{x\sin(2x)}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\cos(2x)\right) + c$$

$$= \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{1}{4}\cos(2x) + c$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx = \left[\frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \cancel{\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\sin(\pi)}{2}} + \frac{1}{4}\cos(\pi) - \frac{0\cdot\sin(0)}{2} - \frac{1}{4}\cos(0) =$$

$$= \frac{1}{4}(-1) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

**5.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(e^{(x^2)} - \cos x\right)}{x^2}\,dx$

(a) diverge positivamente (b) diverge negativamente (c) non esiste ► (d) converge

*Soluzione*:

Sia $f(x) = \dfrac{\sin(e^{x^2} - \cos x)}{x^2}$ e osserviamo che $f$ non è definita per $x=0$. Dividiamo l'intervallo di integrazione in $x=1$ e consideriamo prima $\int_0^1 f(x)dx$.

Per $x \to 0$ risulta

$$f(x) = \frac{\sin\left(1 + x^2 + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right)}{x^2} = \frac{\sin\left(\frac{3x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^4)}{x^2} \longrightarrow \frac{3}{2}$$

quindi $f$ è limitata in un intorno di $x=0$, pertanto l'integrale $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Per $x \to +\infty$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$$

quindi, per il criterio del confronto, $\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$ converge e, per il criterio di assoluta convergenza, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Unendo i due intervalli otteniamo che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

**6.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x + \sqrt{x}}\,dx$

(a) diverge positivamente ▶ (b) converge (c) non esiste (d) diverge negativamente

*Soluzione*:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx \quad . \quad \text{Sia } f(x)=\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x+\sqrt{x}} .$$

$f(x)>0 \ \forall x \in (0,+\infty)$ e $f$ non è definita per $x=0$.

osserviamo che

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} . \quad \text{Scegliamo } g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ e osserviamo}$$

che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\cancel{\sqrt{x}}\,(1+\sqrt{x})}\cdot\cancel{\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{arctg}(+\infty)}{1+0} = \pi/2 .$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

Vediamo per $x\to+\infty$.

$$f(x)= \frac{\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x+\sqrt{x}} = \frac{1}{x}\,\frac{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{x^2}\,\frac{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Scegliamo $g(x)=\frac{1}{x^2}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\cancel{x^2}}\,\frac{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\cancel{x^2} = 1 .$$

Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

**7.** L'insieme $A=\left\{n\in\mathbb{N} : \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{2}\right\}$

► (a) ha minimo ma non ha massimo

(b) ha sia massimo che minimo

(c) ha massimo ma non ha minimo

(d) non ha né massimo né minimo

*Soluzione*:

Poniamo $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n+1}\right)$ e consideriamo la sottosuccessione estratta

$$b_n = a_{4n+1} = \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2} + \frac{1}{(4n+1)+1}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4n+2}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4n+2}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{+\infty}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

quindi $\exists\, \bar{n}: \quad n \geq \bar{n} \Rightarrow b_n > \frac{1}{2}$.

Risulta allora che $a_n > \frac{1}{2}$ per infiniti valori di $n$,

di conseguenza $A$ non ha massimo.

$A$ ha invece minimo come ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$.

**8.** La successione $a_n = e^{n^2} - n^2$:

(a) non è limitata inferiormente

► (b) non è limitata superiormente

(c) è strettamente crescente e limitata superiormente

(d) è strettamente decrescente e limitata inferiormente

*Soluzione*:

$a_n = e^{n^2} - n^2$.

$$\lim_{n\to\infty} e^{n^2} - n^2 = \lim_{n\to\infty} e^{n^2}\left(1 - \frac{n^2}{e^{n^2}}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$$

per gerarchia di infiniti

quindi $(a_n)$ non è limitata superiormente.

**9.** La serie $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n}\right)$

► (a) converge ma non converge assolutamente

(b) diverge positivamente

(c) converge assolutamente

(d) è indeterminata

*Soluzione*:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-\frac{1}{n}\right)=\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=-\sin\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)=-\left(\cancel{\sin(n\pi)}\cos\left(-\frac{1}{n}\right)+\cos(n\pi)\sin\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\cos(n\pi)\sin\frac{1}{n}=(-1)^n\sin\frac{1}{n}.$$

Ponendo $a_n=\sin\frac{1}{n}$, la serie diventa $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$.

La successione $a_n$ è decrescente dato che è composizione della successione $\frac{1}{n}$ (decrescente) e della funzione $\sin t$ che per $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ è crescente.

Inoltre $a_n>0$ $\forall n\geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

Dal criterio di Leibniz otteniamo che la serie converge.

Per la convergenza assoluta osserviamo che

$$|(-1)^n a_n|=a_n=\sin\frac{1}{n}.$$

Scegliendo $b_n=\frac{1}{n}$ abbiamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.

Dato che $\sum b_n=+\infty$, dal criterio del confronto asintotico, anche $\sum a_n=+\infty$, quindi la serie non converge assolutamente.

**10.** La serie $\sum_{n\geq 1}\sqrt{n}\,\sin\frac{1}{n^3}$

(a) diverge positivamente (b) è indeterminata ► (c) converge (d) è a segni alterni

*Soluzione*:

$a_n = \sqrt{n}\,\sin\frac{1}{n^3} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right) = \frac{\sqrt{n}}{n^3}\left(1 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{n^{5/2}}\left(1 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

Osserviamo che $a_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1$ e scegliamo $b_n = \frac{1}{n^{5/2}}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, quindi dal criterio del confronto asintotico,

otteniamo che $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, dato che $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

**11.** La funzione $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, sul dominio $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$ assume

(a) il minimo in un punto interno e il massimo sulla frontiera

(b) sia massimo che minimo in punti interni

► (c) il massimo in un punto interno e il minimo sulla frontiera

(d) sia massimo che minimo sulla frontiera

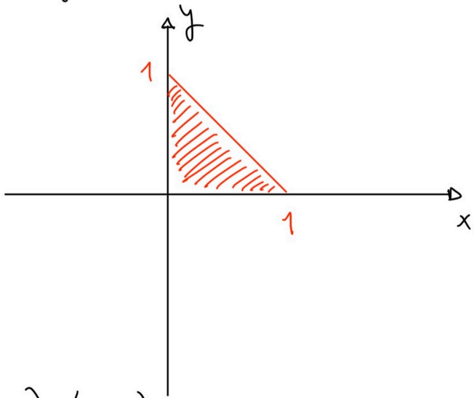
*Soluzione*:

$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \le 1\}$.

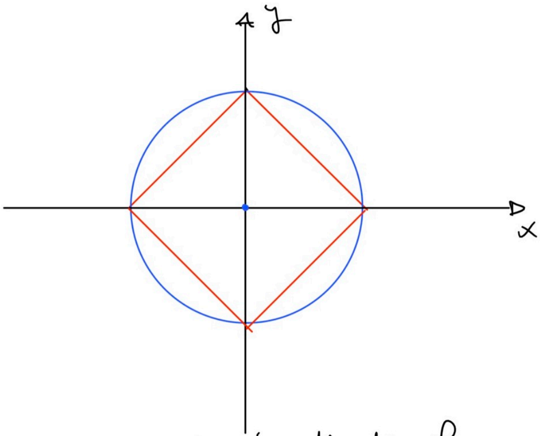
Disegniamo il dominio $\Omega$ che risulta simmetrico sia rispetto all'asse x che all'asse y per la presenza dei valori assoluti.

Consideriamo solo il primo quadrante, quindi

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ |x|+|y| \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x+y \le 1 \end{cases}$$




Per simmetria, il dominio che si ottiene è il quadrato di vertici $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$




Consideriamo ora gli insiemi di livello di f, cioè le soluzioni di

$f(x,y) = k \iff 1 - \sqrt{x^2+y^2} = k \iff 1-k = \sqrt{x^2+y^2}$.

Osserviamo subito che se $k>1$ l'insieme di livello è vuoto, se $k=1$ è il solo punto $(0,0)$ e se $k<1$ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $1-k$.

Ne segue che il massimo della funzione è assunto in $(0,0)$, interno al dominio, e il minimo nei quattro vertici del quadrato, quindi sulla frontiera.

**12.** La funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ nel punto (0,0)

(a) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

► (b) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(c) ha entrambe le derivate parziali ed è continua

(d) non è continua e non ha nessuna delle derivate parziali

*Soluzione*:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Quindi esistono entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Consideriamo ora la restrizione di $f$ all'asse $y$ rappresentato dalla curva $\gamma(t) = (0,t)$. Risulta che

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \to 0} f(0,t) = \lim_{t \to 0} 0 = 0$$

Ora consideriamo la restrizione alla parabola $y^2 = x$ rappresentato dalla curva $\alpha(t) = (t^2, t)$.

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t \to 0} f(t^2, t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1 \neq 0$$

quindi non esiste il limite $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ e la $f$ non è continua in $(0,0)$.